2. Jevy, pravděpodobnosti jevů

Příklady

① Hod kostkou

množina možných výsledků $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ počet možných výsledků $m(\Omega) = 6$

jev A ... padne sudé číslo $A = \{2,4,6\}$ počet výsledků příznivých jevu A je $m(A) = 3$

jev B ... padne 1 nebo 3 $B = \{1,3\}$ $m(B) = 2$

jev C ... padne číslo menší než 7 $C = \{1,2,3,4,5,6\} = \Omega$ JEV JISTÝ $m(C) = m(\Omega) = 6$

jev D ... padne číslo větší než 6 $D = \emptyset$ JEV NEMOŽNÝ $m(D) = 0$

Kolik je celkem různých jevů – jako podmnožin množiny Ω (množina všech výsledků), tj. $2^m = 2^6$

JEVY – podmnožiny množiny všech možných výsledků, zn. $A, B, C, \dots$

– popisujeme je zpravidla nějakou vlastností

– pracujeme s nimi jako s podmnožinami

průnik jevů A a B – $A \cap B$, sjednocení jevů A a B – $A \cup B$, doplněk jevu A – A',

jev A je podmnožinou jevu B – $A \subset B$

– pokud Ω má *m* výsledků ⇒ existuje CELKEM 2^m JEVŮ (jako podmnožin množiny Ω)

– VÝSLEDKY PŘÍZNIVÉ JEVU A: prvky množiny A

– JEV JISTÝ: $A = \Omega$ $m(A) = m(\Omega) = m$ počet výsledků příznivých jevu A je m

NEMOŽNÝ: $A = \emptyset$ $m(A) = 0$ počet výsledků příznivých při A je 0

PRAVDĚPODOBNOST JEVU A – zn. $P(A)$

– součet pravděpodobností výsledků příznivých jevu A $P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$

– pokud výsledky stejně pravděpodobné

$$P(A) = \frac{m(A)}{m}$$

m(A)... počet výsledků příznivých jevu A

m ... počet všech možných výsledků

– platí

$0 \leq P(A) \leq 1$ $P(\Omega) = 1$ jistý jev $P(\emptyset) = 0$ nemožný jev

Příklady

② Hod kostkou (viz příklad 1)

A ... padne sudé číslo $p(A) = \frac{m(A)}{m} = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

B ... padne 1 nebo 3 $p(B) = \frac{m(B)}{m} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

C ... padne číslo menší než 7 $p(C) = \frac{m(C)}{m} = 1$ jistý jev

D ... padne číslo větší než 6 $p(D) = \frac{m(D)}{m} = \frac{0}{6} = 0$ nemožný jev

③ Hod dvěma kostkami – bílou a černou. Jaká je pravděpodobnost, že padne aspoň jedna 6?

počet možných výsledků $m = m(\Omega) = V'(2,6) = 6^2 = 36$

(11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66)

– vybíráme dvojice ze 6 čísel, záleží na pořadí, s opak. ⇒ dvojčlenné variace ze 6 prvků s opakováním

jev A ... padne aspoň 1 šestka

$A = \{(1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (6,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5)\}$

$m(A) = 11$

pravděpodobnost jevu A

$p(A) = \frac{m(A)}{m} = \frac{11}{36}$

④ Jaká je pravděpodobnost, že

a) při hodu jednou mincí padne líc

A... padne líc $\quad \Omega = \{L, R\} \quad P(A) = \frac{m(A)}{m} = \frac{1}{2}$

$m(A) = 1 \quad m = m(\Omega) = 2$

b) při dvojnásobném hodu mincí aspoň jednou padne líc

A... padne aspoň 1 líc $\quad A = \{LL, LR, RL\} \quad m(A) = 3$

$\Omega = \{LL, LR, RL, RR\} \quad m = m(\Omega) = 4 \quad P(A) = \frac{m(A)}{m} = \frac{3}{4}$

[Pozor! d'Alembert uvažoval pouze 3 možnosti Ω={LL, LR, RR} ⇒ P(A) = 2/3 CHYBNĚ, protože LR není stejně pravděpodobné s LL, RR ⇒ nelze použít vztah pro stejně pravděpodobné výsledky]

c) při hodu 4 nerozlišitelnými mincemi padne líc alespoň na 3 mincích

$m = m(\Omega) = V'(4,2) = 2^4 = 16$

čtveřice ze 2 (L,R), zál. na poř., opak.

$P(A) = \frac{m(A)}{m} = \frac{5}{16}$

A... líc aspoň na 3 ze 4

$A = \{LLLR, LLRL, LRLL, RLLL, LLLL\} \quad m(A) = 5$

⑤ Jaká je pravděpodobnost ve Sportce (49 čísel, 6 vsázíme, 6 losováno)

a) výhry v V. pořadí (3 ze 6 vylosovaných se shodují se vsazenými)

$P(A) = \frac{m(A)}{m} \quad m = K(6,49) = \binom{49}{6}$

$P(A) = \frac{K(3,6) \cdot K(3,43)}{K(6,49)} \quad m(A) = K(3,6) \cdot K(3,43)$

vsadím 3 ze 6 vylosov. a 3 z (49−6) nevylos.

$P(A) = \frac{\binom{6}{3}\binom{43}{3}}{\binom{49}{3}}$

b) že neuhádneme ani jedno ze 6 tažených čísel

$P(B) = \frac{K(6,43)}{K(6,49)} = \frac{\binom{43}{6}}{\binom{49}{6}} \doteq 0{,}436 \ (= 43{,}6\,\%)$

c) výhry v 1. pořadí

$P(C) = \frac{K(6,6)}{K(6,49)} = \frac{\binom{6}{6}}{\binom{49}{6}} = 0{,}0000000715$

⑦ **Hodíme 6 kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že**

a) padnou vesměs různá čísla ... A

$m(\Omega) = V'(6,6) = 6^6$ (šestice ze 6 čísel s opak., zál. na poř.)

$m(A) = P(6) = 6!$ (šestice ze 6 čísel bez opak. zál. na poř.)

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{6!}{6^6} = 0{,}0154$$

b) padnou vesměs sudá čísla ... B

$m(\Omega) = V'(6,6) = 6^6$

$m(B) = V'(6,3) = 3^6$ (šestice ze 3 sudých s op. zál. na poř.)

$$P(B) = \frac{m(B)}{m(\Omega)} = \frac{3^6}{6^6} = \left(\frac{3}{6}\right)^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0{,}0156$$

⑧ **V bedně je 10 součástek, z nichž 3 jsou vadné. Jaká je pravděpodobnost, že mezi 4 náhodně vybranými součástkami bude**

a) 0 vadných ... A

$$P(A) = \frac{m(A)}{m} = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{\binom{7}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{\cancel{4\cdot3\cdot2\cdot1}}}{\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{\cancel{4\cdot3\cdot2\cdot1}}} = \frac{\cancel{7}\cdot\cancel{6}^{3}\cdot5\cdot\cancel{4}}{10\cdot\cancel{9}_{3}\cdot\cancel{8}\cdot\cancel{7}} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

$m = K(4,10) = \binom{10}{4}$ vyb. 4 ze 10, nez. na poř.

$m(A) = K(0,3)\cdot K(4,7) = \binom{3}{0}\cdot\binom{7}{4} = \binom{7}{4}$ vyb. 0 vad. ze 3 a 4 dobré ze 7

b) právě 2 vadné ... B

2V ze 3 a 2D ze 7

$m(B) = K(2,3)\cdot K(2,7)$

$m(\Omega) = m = K(4,10)$

$$P(B) = \frac{m(B)}{m} = \frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{7}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{\frac{3\cdot2}{2\cdot1}\cdot\frac{7\cdot6}{2\cdot1}}{\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}} = \frac{3\cdot7\cdot3}{10\cdot3\cdot7} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

c) nejvýše 1 vadná ... C

(1V ze 3 a 3D ze 7) nebo (0V ze 3 a 4D ze 7)

$m(C) = K(1,3)\cdot K(3,7) + K(0,3)\cdot K(4,7)$

$$P(C) = \frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{7}{3}+\binom{3}{0}\cdot\binom{7}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{3\cdot\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}+1\cdot\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}{\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}} = \frac{3\cdot7\cdot5+7\cdot5}{10\cdot3\cdot7} = \frac{\cancel{7}\cdot5(3+1)}{\cancel{10}_{2}\cdot3\cdot\cancel{7}} = \frac{4}{2\cdot3} = \frac{2}{3}$$

d) právě 4 vadné ... D

4V ze 3 (vadných) – NELZE

NEMOŽNÝ JEV $P(D) = 0$

e) alespoň 2 vadné ... E

DÚ

(2V ze 3 a 2D ze 7) $\vee$ (3V ze 3 a 1D ze 7) $m(\Omega) = K(4,10)$

$$P(E) = \frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{7}{2}+\binom{3}{3}\cdot\binom{7}{1}}{\binom{10}{4}} = \frac{\frac{3\cdot2}{2\cdot1}\cdot\frac{7\cdot6}{2\cdot1}+1\cdot7}{\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}} = \frac{63+7}{210} = \frac{70}{210}$$

$$P(E) = \frac{1}{3}$$

⑨ Dodávku 50 ks zboží přijmeme, jestliže mezi 10 namátkou vybranými kusy není ani jeden vadný.

DÚ

Jaká je pravděpodobnost, že ji přijmeme, obsahuje-li (ve skutečnosti)

a) 5 vadných   0 z 5V a 10 z 45D

$$P(A) = \frac{m(A)}{m} = \frac{\binom{5}{0}\cdot\binom{45}{10}}{\binom{50}{10}}$$

b) 10 vadných   0 z 10V a 10 z 40D

$$P(B) = \frac{m(B)}{m} = \frac{\binom{10}{0}\cdot\binom{40}{10}}{\binom{50}{10}}$$

⑩ V obchodu je ze 100 televizorů 85 ks 1. jakosti a 15 ks 2. jakosti. Prvních 10 kupujících dostalo televizor 1. jakosti. Jaká je pravděpodobnost, že jedenáctému kupujícímu bude předveden televizor 2. jakosti.

11. kupující má na výběr z celkem 100 − 10 = 90 televiz., z toho

1. jak. 85 − 10 = 75 (10 D bylo už prodáno)

2. jak. 15

– pravd., že 11. kup. bude předv. tel. 2. j.: $P(A) = \frac{K(1,15)}{K(1,90)} = \frac{\binom{15}{1}}{\binom{90}{1}} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$

⑪ V osudí jsou 4 bílé a 3 modré koule. Náhodně vybereme 2 koule. Určete pravděpodobnost, že

DÚ

a) obě koule jsou bílé ... A vyb. 2 z 7, $m = K(2,7)$

$m(A) = K(2,4)\cdot K(0,3)$

vyb. 2 z 4B a 0 z 3M

$$P(A) = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{3}{0}}{\binom{7}{2}} = \frac{\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\cdot 1}{\frac{7\cdot 6}{2\cdot 1}} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\cdot 3}{7\cdot\cancel{6}} = \frac{2}{7}$$

b) jedna bílá a jedna modrá ... B

1 z 4B a 1 z 3M

$m(B) = K(1,4)\cdot K(1,3)$

$$P(B) = \frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{4\cdot 3}{\frac{7\cdot 6}{2\cdot 1}} = \frac{4\cdot 3}{7\cdot 3} = \frac{4}{7}$$

⑫ Z úplné hry 32 karet vytáhneme 3 karty. Jaká je pravděpodobnost, že budou

DÚ

a) 2 zelené ... A

2 z 8Z a 1 z (32 − 8)

$$P(A) = \frac{\binom{8}{2}\cdot\binom{24}{1}}{\binom{32}{3}} \qquad m = K(3,32)$$

b) všechny červené nebo všechna esa ... B

3 z 8Č a 0 z (32 − 8) nebo 3 z 4es a 0 z (32 − 4)

$$P(B) = \frac{\binom{8}{3}\cdot\binom{24}{0} + \binom{4}{3}\cdot\binom{28}{0}}{\binom{32}{3}}$$

⑬ Ve třídě je 32 žáků, z nichž 10 není připraveno. V hodině budou 3 žáci vyzkoušeni. Jaká je pravděpodobnost, že aspoň 2 z nich budou připraveni?   [aspoň 2 připraveni, tj: 2 nebo 3]

DÚ

celkem 32 − nepřipr. 10, 22 připrav.

(2 z 22P a 2 z 10N) nebo (3 z 22P a 1 z 10N) $P(A) = \frac{\binom{22}{2}\binom{10}{2} + \binom{22}{3}\cdot\binom{10}{1}}{\binom{32}{3}} = 0{,}776$

$m(A) = K(2,22)\cdot K(2,10) + K(3,22)\cdot K(1,10)$

⑭ Automat na nápoje se pokazil. Jaká je pravděpodobnost, že z něj vypadne nápoj nebo nápoj i mince, jestliže po vhození mincí z něho

! JEVY NEJSOU STEJNĚ PRAVDĚPODOBNÉ $\sum_{i=1}^{4} p_i = 1$

– v polovině případů nevypadne nic $p_1 = \frac{1}{2}$

– v desetině případů vypadne nápoj i mince $p_2 = \frac{1}{10}$

– v ostatních případech se stejnou pravděpodobností p

jen nápoj, nebo mince

$p_3 = p$ $p_4 = p$

$$p_1 + p_2 + p + p = 1$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{10} + 2p = 1$$
$$2p = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{10}$$
$$2p = \frac{10 - 5 - 2}{10}$$
$$2p = \frac{4}{10}$$
$$2p = \frac{2}{5} \quad |:2$$
$$p = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \Rightarrow$$
$$p_3 = \frac{1}{5},\ p_4 = \frac{1}{5}$$

A... vypadne nápoj nebo nápoj i mince

$$P(A) = p_2 + p_3 = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$$

⑮ Na falešné kostce jsou pravděpodobnosti padnutí čísla 1 – 0,10, 2 – 0,15, 3 – 0,15, 4 – 0,15, 5 – 0,15, 6 – 0,30. S jakou pravděpodobností padne *jevy nejsou stejně pravděpodobné*

a) sudé číslo ... *jev A (tj: padne 2 nebo 4 nebo 6)*

$$P(A) = p_2 + p_4 + p_6 = 0{,}15 + 0{,}15 + 0{,}30 = \underline{0{,}6}$$

b) číslo nedělitelné 3 ... *jev B (tj: padne 1 nebo 2 nebo 4 nebo 5)*

DÚ

$$P(B) = p_1 + p_2 + p_4 + p_5 = 0{,}10 + 0{,}15 + 0{,}15 + 0{,}15 = \underline{0{,}55}$$

⑯ Jaká je pravděpodobnost, že v rodině se 3 dětmi

a) budou 2 chlapci a 1 děvče ... *jev A*

$$\Omega = \{(k,k,k), (k,k,d), (k,d,k), (d,k,k), (k,d,d), (d,k,d), (d,d,k), (d,d,d)\}$$

$m(\Omega) = 8$

$m(A) = 3$

$$P(A) = \frac{m(A)}{m} = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{3}{8} = \underline{0{,}375}$$

b) jsou jen dívky, nebo nejmladší bude chlapec ... *jev B*

DÚ

$$\Omega = \{(k,k,k), (k,k,d), (k,d,k), (d,k,k), (k,d,d), (d,k,d), (d,d,k), (d,d,d)\}$$

$m(\Omega) = 8$

$m(B) = 5$

$$P(B) = \frac{m(B)}{m} = \frac{m(B)}{m(\Omega)} = \frac{5}{8} = \underline{0{,}625}$$

⑰ Jaká je pravděpodobnost, že 2 studenti při zkoušce si vylosují 3 otázky z 20 otázek

a) tytéž ... *jev A* $m = K(3,20) = \binom{20}{3}$ *3 ot. ze 20 bez opak., nez. na pořadí*

oba stejnou trojici (1. způ.) $m(A) = 1$

$$P(A) = \frac{m(A)}{m} = \frac{1}{\binom{20}{3}} = \frac{1}{\frac{20\cdot19\cdot18}{3\cdot2\cdot1}} = \frac{1}{20\cdot19\cdot3} \doteq \underline{0{,}0009}$$

b) každý jiné (nedostanou ani jednu stejnou) ... *jev B*

1. student trojici 1. způsobem a pak 2. st. trojici, ale už jen ze 17 ot.

$$P(B) = 1\cdot\frac{\binom{17}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{\frac{17\cdot16\cdot15}{3\cdot2\cdot1}}{\frac{20\cdot19\cdot18}{3\cdot2\cdot1}} = \frac{17\cdot16\cdot15}{20\cdot19\cdot18} \doteq \underline{0{,}569}$$

⑱ Házíme 4 mincemi. Jaká je pravděpodobnost, že líc padne aspoň na 3 mincích?

DÚ

čtveřice ze 2 (R, L) s opak. $m = V'(4,2) = 2^4 = 16$

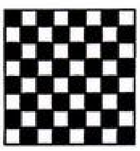
A ... líc aspoň na 3 mincích

$$A = \{(L,L,L,R), (L,L,R,L), (L,R,L,L), (R,L,L,L), (L,L,L,L)\} \quad m(A) = 5$$

$$P(A) = \frac{m(A)}{m} = \underline{\frac{5}{16}}$$

⑲ Na šachovnici postavíme náhodně 2 věže, bílou a černou. Jaká je pravděpodobnost, že se mohou navzájem brát? (Návod: věže se mohou brát, jen jsou-li obě v téže řadě nebo v témže sloupci.)

DÚ



$m(\Omega) = \binom{64}{2}$ *vybereme 2 políčka ze 64*

$m(A)$ *obě v téže řadě nebo v témže sloupci*

$$\underbrace{8}_{8\ \text{řad}}\cdot\binom{8}{2} + \underbrace{8}_{8\ \text{sloupců}}\cdot\binom{8}{2}$$

$$P(A) = \frac{16\cdot\binom{8}{2}}{\binom{64}{2}} = \frac{16\cdot\frac{8\cdot7}{2\cdot1}}{\frac{64\cdot63}{2\cdot1}} = \frac{16\cdot8\cdot7}{64\cdot63} = \underline{\frac{2}{9}}$$